

### Série 3 (Corrigé)

Cette série fait suite aux chapitres 1.2-1.3 Mots-clés : *variables libres, variables liées, vecteurs, équations vectorielles, combinaisons linéaires, espace engendré, équations matricielles*

#### Remarques :

1. il existe plusieurs méthodes possibles pour résoudre certains exercices. Parfois le corrigé donne aussi une méthode alternative, méthode que nous verrons plus tard dans le cours ;
2. il peut arriver que certaines questions soient reliées au cours du jeudi.

#### Exercice 1

Ecrire le vecteur  $\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$  comme combinaison linéaire des vecteurs  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ .

#### Sol.:

On cherche des scalaires  $\alpha$  et  $\beta$  tels que :

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$$

La matrice augmentée du système est :

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{array} \right)$$

Échelonnement-réduction :

$$\begin{aligned} & \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1}]{\sim} \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2} \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{L_2 \leftarrow -\frac{1}{3}L_2} \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - 4L_2} \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

On obtient donc :  $\alpha = -1$  et  $\beta = 2$ .

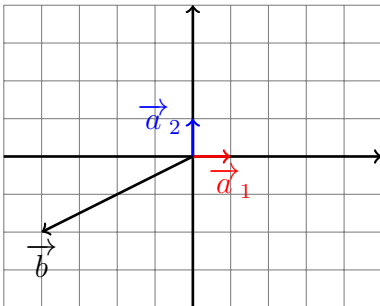
**Conclusion :**

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = -1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

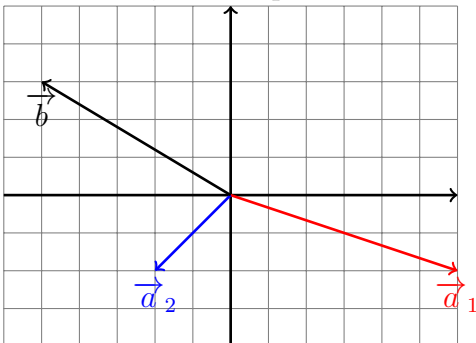
### Exercice 2

À l'aide des graphes ci-dessous, trouver les coefficients des combinaisons linéaires demandées. Il se peut qu'il existe plusieurs solutions, ou aucune solution. Dans les graphes ci-dessous, un carré = 1 unité.

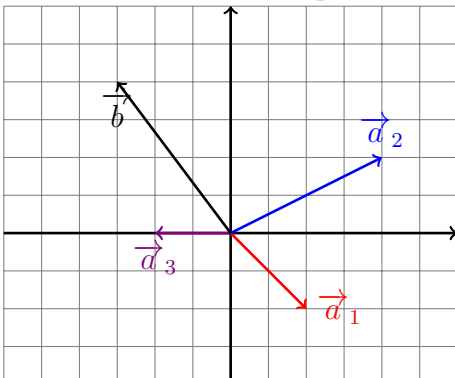
- a) Trouver  $\lambda_1, \lambda_2$  tels que  $\vec{b} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2$



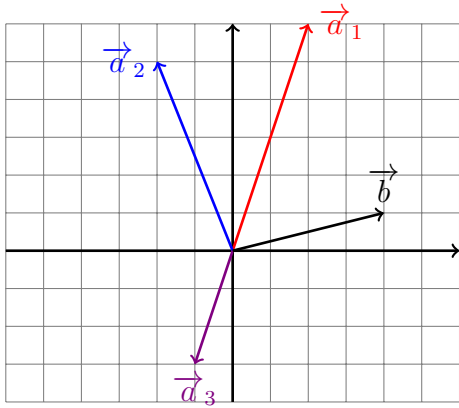
- b) Trouver  $\lambda_1, \lambda_2$  tels que  $\vec{b} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2$



- c) Trouver  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  tels que  $\vec{b} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \lambda_3 \vec{a}_3$



- d) Trouver  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  tels que  $\vec{b} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \lambda_3 \vec{a}_3$ . Peut-on trouver  $\mu_1$  et  $\mu_3$  tels que  $\vec{b} = \mu_1 \vec{a}_1 + \mu_3 \vec{a}_3$ ?



**Sol.:**

- a)  $\lambda_1 = -4, \lambda_2 = -2$
- b)  $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -1/2$
- c) Il y a une infinité de solutions. En voici une :  $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 0$  et  $\lambda_3 = -1/2$
- d) Il y a une infinité de solutions. En voici deux :  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1$  et  $\lambda_3 = -2$  ou  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$  et  $\lambda_3 = 0$ . Non on ne peut pas trouver de  $\mu_1$  et  $\mu_3$  tels que  $\vec{b}$  soit une combinaison linéaire de  $\vec{a}_1$  et  $\vec{a}_3$ , car ces deux vecteurs sont colinéaires.

Une autre méthode est d'écrire les systèmes d'équations qui correspondent aux équations vectorielles à résoudre.

### Exercice 3

Considérons les vecteurs  $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -13 \\ -3 \end{pmatrix}$ , et  $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

- a) Est-il possible d'écrire  $\vec{b}$  comme combinaison linéaire de  $\vec{a}_1$  et  $\vec{a}_2$ ?
- b) Donner une interprétation géométrique du résultat.

**Sol.:**

- a) Non. Considérons l'équation linéaire  $x_1 \vec{a}_1 + x_2 \vec{a}_2 = \vec{b}$ , d'inconnues  $x_1, x_2$ . Le système linéaire correspondant est

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 = -3 \\ -2x_1 - 13x_2 = 8 \\ 3x_1 - 3x_2 = 1 \end{cases}$$

avec pour matrice augmentée

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 \\ -2 & -13 & 8 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

et pour forme échelonnée réduite

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On peut voir que ce système ne possède pas de solution.

- b) Cela signifie que le vecteur  $\vec{b}$  n'appartient pas au plan formé des vecteurs  $x_1 \vec{a}_1 + x_2 \vec{a}_2$ , avec  $x_1$  et  $x_2$  réels.

#### Exercice 4

Considérons les vecteurs  $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$ , et  $\vec{b} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}$ .

Pour quelle(s) valeur(s) de  $\alpha$  le vecteur  $\vec{b}$  est-il une combinaison linéaire de  $\vec{a}_1$  et  $\vec{a}_2$  ?

**Sol.:** Considérons le système linéaire  $x_1 \vec{a}_1 + x_2 \vec{a}_2 = \vec{b}$ . En coordonnées, on obtient le système

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 = \alpha \\ x_2 = -5 \\ -2x_1 + 8x_2 = -3 \end{cases}$$

avec la matrice augmentée

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & \alpha \\ 0 & 1 & -5 \\ -2 & 8 & -3 \end{pmatrix}.$$

Après des opérations élémentaires sur les lignes, on obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -15 + \alpha \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 7 + 2\alpha \end{pmatrix}.$$

On voit que le système est compatible si et seulement si  $7 + 2\alpha = 0$ , i.e.  $\alpha = -\frac{7}{2}$ . Dans ce cas, la matrice ci-dessus est la forme échelonnée réduite.

(Remarque : Lorsque  $7 + 2\alpha \neq 0$ , le système est incompatible, et la forme échelonnée réduite est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En résumé, le vecteur  $\vec{b}$  est une combinaison linéaire de  $\vec{a}_1$  et  $\vec{a}_2$  si et seulement si  $\alpha = -\frac{7}{2}$ .

#### Exercice 5

Considérons le système linéaire

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 4 \\ x_1 + 4x_2 - 8x_3 = 7 \\ -3x_1 - 7x_2 + 9x_3 = -6. \end{cases}$$

- Écrire le système sous forme matricielle  $A\vec{x} = \vec{b}$ .
- Écrire le système comme une combinaison linéaire des colonnes de la matrice  $A$ .
- Trouver la solution de l'équation  $A\vec{x} = \vec{b}$ .

d) Subsidaire : écrire l'ensemble des solutions en fonction d'un paramètre.

**Sol.:**

a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 1 & 4 & -8 \\ -3 & -7 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -6 \end{pmatrix}$$

b)

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -5 \\ -8 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -6 \end{pmatrix}$$

c) La matrice augmentée est

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 4 \\ 1 & 4 & -8 & 7 \\ -3 & -7 & 9 & -6 \end{pmatrix},$$

et la forme échelonnée réduite est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La variable  $x_3$  est libre, on peut donc écrire l'ensemble des solutions comme

$$\begin{cases} x_1 = -5 - 4x_3 \\ x_2 = 3 + 3x_3 \\ x_3 \text{ libre} \end{cases}$$

d) En posant  $x_3 = t \in \mathbb{R}$ , on en déduit que les solutions  $(s_1, s_2, s_3)$  sont données par

$$s_3 = t, t \in \mathbb{R}, s_1 = -5 - 4t, s_2 = 3 + 3t.$$

On en déduit l'ensemble des solutions :

$$\left\{ \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

## Exercice 6

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

V F

- a) En appliquant différentes opérations (licites) sur les lignes d'une matrice, on obtient des formes échelonnées réduites différentes.
- b) Une variable de base d'un système linéaire est une variable qui correspond à un pivot dans une colonne.
- c) La dernière colonne d'une matrice augmentée peut faire office de colonne pivot.
- d) Un système n'est compatible que lorsque chaque colonne contient un pivot.

**Sol.:**

- a) Faux. La forme échelonnée **réduite** d'une matrice  $A$  est unique, tandis qu'une forme échelonnée de  $A$  n'est pas nécessairement unique.
- b) Vrai. Une variable de base d'un système linéaire est une variable qui correspond à un pivot dans une colonne.
- c) Vrai. Selon la définition vue en classe cela est correct, le système est alors incompatible.
- d) Faux. Prenons par exemple  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  qui est déjà échelonnée réduite. La dernière colonne de  $A$  n'a pas de pivot mais le système  $A\vec{x} = \vec{0}$  possède la solution  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  et est donc compatible.

### Exercice 7

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

- |  |                          |                          |
|--|--------------------------|--------------------------|
|  | V                        | F                        |
| a) Si une forme échelonnée d'une matrice augmentée possède $[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 5]$ comme ligne, alors le système est incompatible. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| b) Il existe plusieurs formes échelonnées d'une matrice augmentée.   | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| c) À chaque fois que l'on a une variable libre dans un système linéaire, le système possède une infinité de solutions.           | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| d) Une solution générale d'un système est une description explicite de toutes les solutions du système.                          | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**Sol.:**

- a) Vrai. Cela signifie que le système a 4 inconnues  $x_1, x_2, x_3, x_4$  et une telle ligne signifie que  $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 = 5$  ce qui n'est pas possible, ainsi le système est incompatible.
- b) Vrai. Il existe plusieurs formes échelonnées d'une matrice augmentée, par exemple  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  sont toutes deux des formes échelonnées du même système augmenté.
- c) Faux. Il se peut que le système soit incompatible et donc sans solution. Par exemple le système augmenté  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  a  $x_2$  comme variable libre (pas de pivot en 2ème colonne) mais est incompatible.
- d) Vrai. C'est une question de vocabulaire introduit en classe.

### Exercice 8

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

- |  |                          |                          |
|--|--------------------------|--------------------------|
|  | V                        | F                        |
| a) Le système d'équations linéaires homogène représenté par la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ est compatible. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

- b) Le système d'équations linéaires inhomogène représenté par la matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$  est compatible.
- c) Si la matrice des coefficients d'un système de quatre équations à quatre inconnues a un pivot dans chaque colonne, alors le système est compatible.
- d) Si la matrice des coefficients d'un système de quatre équations à quatre inconnues a un pivot dans chaque ligne, alors le système est compatible.
- e) Si la matrice augmentée d'un système de quatre équations à quatre inconnues a un pivot dans chaque ligne, alors le système est compatible.
- f) Si la matrice augmentée d'un système de quatre équations à quatre inconnues a un pivot dans chaque colonne, alors le système est compatible.

**Sol.:**

- a) Un système d'équations linéaires homogène est toujours compatible! La matrice a beau avoir un pivot dans la dernière colonne, il ne s'agit pas ici d'un pivot dans la colonne des termes inhomogènes. Ceux-ci sont tous nuls et on ne les écrit pas.
- b) La ligne (0 0 0 7) montre que le système d'équations linéaires inhomogène est incompatible.
- c) C'est vrai. Un pivot dans chacune des quatre colonnes implique l'existence d'un pivot dans chaque ligne. On conclut alors par un résultat du cours.
- d) C'est vrai et c'est dit ainsi dans le cours.
- e) C'est faux. Il suffit que la dernière ligne soit de la forme (0 0 0 0 7) par exemple pour que le système soit incompatible.
- f) Si la matrice augmentée d'un système de quatre équations à quatre inconnues est constituée de cinq colonnes, celles des inconnues et celle des termes inhomogènes. Il n'est donc pas possible qu'il y ait un pivot dans chaque colonne.

**Exercice 9**

Calculer  $A(\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2)$ , où

a)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3;$$

b)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}, \alpha_1 = -1, \alpha_2 = 1.$$

**Sol.:**

a)

$$A(\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2) = \begin{pmatrix} 17 \\ 12 \\ 36 \end{pmatrix}.$$

b)

$$A(\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2) = \begin{pmatrix} 18 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

### Exercice 10

Écrire les solutions des systèmes  $A\vec{x} = \vec{b}$  suivants sous la forme  $\vec{x} = \vec{p} + \vec{v}$ , où  $\vec{p}$  est une solution particulière du système, et  $\vec{v}$  est la solution générale du système homogène  $A\vec{x} = \vec{0}$ .

$$\text{a) } \begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 4 \\ x_1 + 4x_2 - 8x_3 = 7 \\ -3x_1 - 7x_2 + 9x_3 = -6 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases}$$

**Sol.:**

a) Forme échelonnée réduite de la matrice augmentée :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solution générale :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) Forme échelonnée réduite de la matrice augmentée :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le système est incompatible. Pas de solution !

### Exercice 11

Les vecteurs suivants sont-ils linéairement indépendants ? Engendrent-ils  $\mathbb{R}^3$  (questions a) et b)) ou  $\mathbb{R}^2$  (question c)) ?

$$\text{a) } \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{b) } \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$$\text{c) } \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

**Sol.:**

a) On cherche une combinaison linéaire des vecteurs telle que

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ce qui conduit au système

$$\begin{cases} x_1 + x_2 & = 0 \\ 2x_1 & + x_3 = 0 \\ x_1 & = 0 \end{cases}.$$

Ce système possède une unique solution triviale  $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ , donc les vecteurs  $\vec{v}_1, \vec{v}_2$  et  $\vec{v}_3$  sont linéairement indépendants, et ils engendrent  $\mathbb{R}^3$ .

b)  $\vec{v}_1, \vec{v}_2$  et  $\vec{v}_3$  ne sont pas linéairement indépendants. En effet,  $\vec{v}_1 = -\vec{v}_2$ . Ainsi ces trois vecteurs n'engendrent pas  $\mathbb{R}^3$ .

c)  $\vec{v}_1, \vec{v}_2$  et  $\vec{v}_3$  ne sont pas linéairement indépendants, car ils sont de taille 2 strictement inférieure au nombre 3 de vecteurs. Cependant, ces vecteurs sont linéairement indépendants deux à deux, donc ils engendrent  $\mathbb{R}^2$ .

## Remarque

On utilise :

Les colonnes de  $A$  engendrent  $\mathbb{R}^m$ .

$\Leftrightarrow$  Pour tout vecteur  $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ , l'équation  $A\vec{x} = \vec{b}$  a une solution  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$  (tout vecteur  $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$  peut s'exprimer comme combinaison linéaire des colonnes de  $A$ ).

$\Leftrightarrow$  La matrice augmentée n'a pas de ligne de la forme  $\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & c \end{bmatrix}$  avec  $c$  non nul (car le système est compatible); la forme échelonnée de  $A$  n'a pas de ligne nulle  $\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$  (car  $A\vec{x} = \vec{b}$  a une solution pour tout  $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ ).

$\Leftrightarrow$  Chaque ligne a une position pivot.

## Exercice 12

a) Déterminer si les vecteurs  $(1, 2, 3)$ ,  $(2, 0, 0)$  et  $(-2, 1, 0)$  engendrent  $\mathbb{R}^3$ .

b) Déterminer si les vecteurs  $(2, -1, 2)$ ,  $(4, 1, 3)$  et  $(2, 2, 1)$  engendrent  $\mathbb{R}^3$ .

**Sol.:**

a) Déterminer si les vecteurs  $(1, 2, 3)$ ,  $(2, 0, 0)$  et  $(-2, 1, 0)$  engendrent  $\mathbb{R}^3$ .

Les trois vecteurs engendrent  $\mathbb{R}^3$  si et seulement si pour tout  $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$ , l'équation matricielle  $A\vec{x} = \vec{b}$  a une solution, où  $A$  a pour colonnes les trois vecteurs donnés.

Cela est équivalent à ce que la matrice échelonnée réduite de  $A$  possède un pivot par ligne.

Formons la matrice  $A$  et échelonnons-la :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1}]{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -4 & 5 \\ 0 & -6 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{\sim \\ L_3 \leftarrow L_3 - \frac{3}{2}L_2}]{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

La matrice échelonnée possède un pivot dans chaque ligne (3 pivots pour 3 lignes).

**Conclusion :** Les vecteurs  $(1, 2, 3)$ ,  $(2, 0, 0)$  et  $(-2, 1, 0)$  engendrent  $\mathbb{R}^3$ .

b) Déterminer si les vecteurs  $(2, -1, 2)$ ,  $(4, 1, 3)$  et  $(2, 2, 1)$  engendrent  $\mathbb{R}^3$ .

**Correction :**

Formons la matrice  $B$  ayant ces vecteurs pour colonnes et échelonnons-la :

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\sim \\ L_1 \leftrightarrow L_2}]{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{\sim \\ L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1}]{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & 6 \\ 0 & 5 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\sim \\ L_3 \leftarrow L_3 - \frac{5}{6}L_2}]{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice échelonnée n'a que 2 pivots pour 3 lignes. La dernière ligne ne possède pas de pivot. Donc les colonnes de  $B$  n'engendrent pas  $\mathbb{R}^3$ .

**Conclusion :** Les vecteurs  $(2, -1, 2)$ ,  $(4, 1, 3)$  et  $(2, 2, 1)$  n'engendrent pas  $\mathbb{R}^3$ .

### Exercice 13

Soit  $A$  une matrice de taille  $m \times n$ . Montrer que les colonnes de  $A$  engendrent  $\mathbb{R}^m$  si et seulement si la forme échelonnée de la matrice  $A$  a une position pivot dans chaque ligne.

**Sol.:**

Les colonnes de  $A$  engendrent  $\mathbb{R}^m$ .

- ⇔ Pour tout vecteur  $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ , l'équation  $A\vec{x} = \vec{b}$  a (au moins) une solution  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$  (tout vecteur  $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$  peut s'exprimer comme combinaison linéaire des colonnes de  $A$ ).
- ⇔ La matrice échelonnée augmentée n'a pas de ligne de la forme  $\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & c \end{bmatrix}$  avec  $c$  non nul (car le système est compatible); et la forme échelonnée de  $A$  n'a pas de ligne nulle  $\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$ .
- ⇔ Chaque ligne a une position pivot.

Reformulation de la solution : soit

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \left( \vec{a}_1 \quad \cdots \quad \vec{a}_n \right)$$

où  $\vec{a}_j \in \mathbb{R}^m, j = 1, \dots, n$  sont les vecteurs colonnes de  $A$ , i.e.  $\vec{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$ .

Dire que  $\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\}$  engendre  $\mathbb{R}^m$  est équivalent à : tout vecteur de  $\mathbb{R}^m$  peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs  $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ , c-à-d :

$$\forall \vec{b} \in \mathbb{R}^m, \exists x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} \text{ tels que } \vec{b} = x_1 \vec{a}_1 + \dots + x_n \vec{a}_n. \quad (1)$$

En forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Ceci est équivalent à dire que pour tout  $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ , l'équation  $A\vec{x} = \vec{b}$  a au moins une solution  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ . Le système est donc compatible pour tout choix possible de  $\vec{b}$ , c-à-d la forme échelonnée de la matrice augmentée n'a pas de ligne de la forme  $\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & c \end{bmatrix}$  où  $c \neq 0$ . Puisque  $c$  dépend de  $\vec{b}$  et que  $\vec{b}$  est arbitraire, il est possible de trouver un vecteur  $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$  tel que  $c \neq 0$ . Donc la seule possibilité de ne pas avoir une telle ligne est qu'il y ait une position pivot dans chaque ligne de  $A$ . Vice-versa, s'il y a une position pivot dans chaque ligne de  $A$ , ce n'est pas possible d'avoir une ligne du type  $\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & c \end{bmatrix}$  avec  $c \neq 0$ .

Considérons par exemple la matrice  $2 \times 3$  suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -3 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

La forme échelonnée de la matrice augmentée est

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & -3 & b_1 \\ 2 & 4 & -2 & b_2 \end{pmatrix} \xrightarrow{3L_2 - 2L_1} \begin{pmatrix} 3 & 6 & -3 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 3b_2 - 2b_1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

La dernière ligne est de la forme  $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & c \end{bmatrix}$ , où  $c = 3b_2 - 2b_1$ . Donc si  $b_2 \neq \frac{2}{3}b_1$  le système est incompatible. En effet, les trois vecteurs colonnes de la matrice  $A$  sont colinéaires et n'engendrent pas  $\mathbb{R}^2$ .

Par contre en prenant la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -3 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \quad (5)$$

et en procédant de la même manière, on obtient

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & -3 & b_1 \\ 2 & 4 & 2 & b_2 \end{pmatrix} \xrightarrow{3L_2 - 2L_1} \begin{pmatrix} \boxed{3} & 6 & -3 & b_1 \\ 0 & 0 & \boxed{12} & 3b_2 - 2b_1 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Il y a bien une position pivot dans chaque ligne, le système est compatible et les colonnes de  $A$  engendrent  $\mathbb{R}^2$ .

### Exercice 14

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 & 8 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ecrire l'ensemble solution de l'équation  $A\vec{x} = \vec{0}$  sous forme paramétrique vectorielle.

**Sol.:** Pour réduire la matrice  $A$  qui est déjà échelonnée, il suffit d'effectuer deux opérations :  $L_1 + 2L_3$  et  $L_2 - 6L_3$  :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 & 8 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 & 8 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On voit ici qu'il y a trois inconnues principales, celles des colonnes pivot,  $x_1$ ,  $x_3$  et  $x_6$ , et 3 inconnues libres ( $x_2$ ,  $x_4$  et  $x_5$ ) que l'on utilise comme paramètres pour décrire la solution générale du système :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ pour } s, t, u \in \mathbb{R}$$

### Exercice 15

Soit  $\text{span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$  avec

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Laquelles des informations suivantes est correcte?

Le span ne contient aucun vecteur de  $\mathbb{R}^4$ .

Le span contient tous les vecteurs de  $\mathbb{R}^4$ .

Le vecteur  $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$  est dans le span.

Le span contient une infinité de vecteurs de  $\mathbb{R}^4$ .

**Sol.:** Comme la troisième composante des quatre vecteurs est nulle, tous les vecteurs de la forme  $\begin{pmatrix} * \\ * \\ a \\ * \end{pmatrix}$  avec  $a \neq 0$ , ne seront pas dans le span. Donc le span ne peut pas contenir le vecteur  $\vec{b}$  ainsi

que tous les vecteurs de  $\mathbb{R}^4$ . Comme  $\vec{v}_1$  (ou  $\vec{v}_2, \dots$ ) est dans le span, le span contient un vecteur de  $\mathbb{R}^4$ . Vu qu'il contient au moins un vecteur de  $\mathbb{R}^4$ , il contient toutes les combinaisons linéaires de celui-ci, et donc une infinité de vecteurs de  $\mathbb{R}^4$ .

**Remarque :** le span de n'importe quelle liste de vecteurs non-nuls contient toujours une infinité de vecteurs.

### Exercice 16

Soit  $\text{span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$  avec

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Laquelles des informations suivantes est correcte ?

$\text{span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\} = \mathbb{R}^3$ .

Le  $\text{span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$  est une droite.

Le  $\text{span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$  est un plan.

Le  $\text{span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$  ne contient que  $\vec{0}$ .

**Sol.:** Le span correspond au plan contenant les points de coordonnées  $(x, y, 0)$ , avec  $x, y \in \mathbb{R}$ . Il ne peut pas être égal à  $\mathbb{R}^3$  car il manque la troisième composante dans  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ .

### Exercice 17

a. Combien de colonnes pivots une matrice  $7 \times 5$  doit-elle posséder pour que ses colonnes soient linéairement indépendantes ?

Moins de 5,  5 exactement,  7 exactement,  entre 5 et 7.

b. Combien de colonnes pivots une matrice  $5 \times 7$  doit-elle posséder pour que ses colonnes engendrent  $\mathbb{R}^5$  ?

Moins de 5,  5 exactement,  7 exactement,  entre 5 et 7.

c. L'application linéaire du plan  $\mathbb{R}^2$  dont la matrice est  $\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$  est

une rotation  une translation  une projection orthogonale  une homothétie

**Sol.:**

a. Combien de colonnes pivots une matrice  $7 \times 5$  doit-elle posséder pour que ses colonnes soient linéairement indépendantes ?

Elle doit posséder cinq colonnes pivots, parce que s'il n'y a pas cinq pivots alors il existe des inconnues libres et donc les colonnes sont dépendantes.

b. Combien de colonnes pivots une matrice  $5 \times 7$  doit-elle posséder pour que ses colonnes engendrent  $\mathbb{R}^5$  ?

Si les colonnes d'une matrice  $5 \times 7$  engendrent  $\mathbb{R}^5$  alors cette matrice doit posséder un pivot dans chaque ligne. Puisque chaque position pivot est dans une colonne cette matrice doit donc posséder cinq colonnes pivots.

c. C'est une projection orthogonale sur la diagonale  $x = y$ . On voit dans les colonnes de cette matrice que les images des deux vecteurs  $\vec{e}_1$  et  $\vec{e}_2$  sont égales et se trouvent sur cette diagonale. Une contemplation un peu plus approfondie de ces images montre qu'il s'agit bien des projections orthogonales.

### Exercice 18

Lors de l'échelonnement de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

la colonne qui ne possède pas de pivot est la

- première  
 deuxième  
 troisième  
 quatrième

**Sol.:** La troisième.

### Exercice 19

Considérer les vecteurs

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -10 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} h+7 \\ 8 \\ 2h+1 \\ 25 \end{pmatrix}.$$

Le vecteur  $\vec{v}_3$  peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2$  lorsque

$\square h = 2$

$\square h = 4$

$\square h = 1$

$\square h = -2$

**Sol.:**  $h = 4$

### Exercices additionnels

#### Exercice 20

Écrire les solutions des systèmes  $A\vec{x} = \vec{b}$  suivants sous la forme  $\vec{x} = \vec{p} + \vec{v}$ , où  $\vec{p}$  est une solution particulière du système, et  $\vec{v}$  est la solution générale du système homogène  $A\vec{x} = \vec{0}$ .

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 8 \\ x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 14 \\ 2x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 19 \end{cases} \\ \text{b)} \quad & \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

**Sol.:**

a) Forme échelonnée réduite de la matrice augmentée :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solution générale :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) Forme échelonnée réduite de la matrice augmentée :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le système est incompatible. Pas de solution !

#### Exercice 21

a) Soient les vecteurs

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ h \end{pmatrix}.$$

i) Pour quelle(s) valeur(s) de  $h$  le vecteur  $\vec{w}$  peut-il être obtenu comme combinaison linéaire de  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2$  ?

ii) Dans ce cas quels sont les coefficients respectifs  $a_1, a_2$  des vecteurs  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2$  ?

b) Le vecteur  $\vec{v} = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}$ , se trouve-t-il dans le plan de  $\mathbb{R}^3$  engendré par les colonnes de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 1 \\ -2 & -8 \end{pmatrix}$$

Justifiez votre réponse.

**Sol.:**

a) Tout élément de l'espace engendré par  $\vec{v}_1, \vec{v}_2$  est de la forme

$$a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2 = a_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

où  $a_1$  et  $a_2$  sont des réels. Le vecteur  $\vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ h \end{pmatrix}$  est engendré par  $\vec{v}_1, \vec{v}_2$  si et seulement il existe des réels,  $a_1$  et  $a_2$  tels que l'équation vectorielle suivante soit satisfaite :

$$a_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ h \end{pmatrix}$$

Sous forme matricielle on effectue des opérations en essayant de ne pas traîner des fractions :

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 10 \\ 2 & 3 & h \end{pmatrix} \sim_{L_1 \leftrightarrow L_2 \cdot 1/2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & h \end{pmatrix} \sim_{\substack{L_2 - 2L_1 \\ L_3 - L_1}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & 2 & h - 5 \end{pmatrix} \sim_{L_3 - 2L_2} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & h + 9 \end{pmatrix} \sim_{(L_1 - L_2) \cdot 1/2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & h + 9 \end{pmatrix}$$

D'où  $h = -9$  pour satisfaire le théorème 2 avec  $a_1 = 6, a_2 = -7$ .

b) Pour voir si le vecteur  $\vec{v}$  est dans le plan engendré par les colonnes de  $A$ , on construit une nouvelle matrice  $B = [A \quad \vec{v}]$ , alors la forme échelonnée réduite de  $B$  montre que

$$\vec{v} = -5 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -8 \end{bmatrix}$$

et donc  $\vec{v}$  est bien dans ce plan.

### Exercice 22

Soit

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$$

Montrer que l'équation  $A\vec{x} = \vec{b}$  n'est pas compatible pour tout vecteur  $\vec{b}$  de  $\mathbb{R}^2$ . Trouver et décrire l'ensemble des vecteurs  $\vec{b}$  pour lesquels  $A\vec{x} = \vec{b}$  est compatible.

**Sol.:** Puisque la deuxième ligne de la matrice  $A$  vaut  $-2$  fois la première, il faut et il suffit que le deuxième coefficient de  $\vec{b}$  vérifie aussi cette propriété :  $b_2 = -2b_1$ . Ainsi pour  $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  le système n'a pas de solution.

### Exercice 23

Pour les vecteurs  $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  donner cinq vecteurs qui appartiennent à  $\text{span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ . Pour chaque vecteur, donner les coefficients de la combinaison linéaire.

**Sol.:** On cherche des vecteurs  $\vec{b} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2$ .

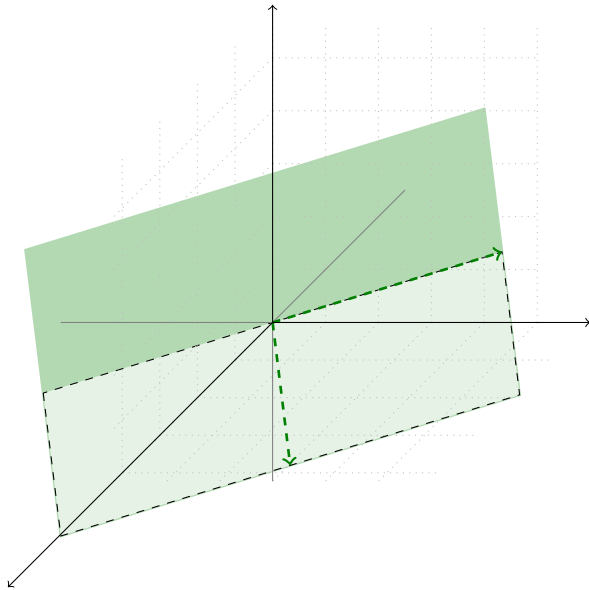
- pour  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$  :  $\vec{b} = \vec{0}$ .
- pour  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2$  :  $\vec{b} = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ .
- pour  $\lambda_1 = -\frac{1}{2}, \lambda_2 = 0$  :  $\vec{b} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$ .
- pour  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$  :  $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ .
- pour  $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 3$  :  $\vec{b} = \begin{pmatrix} -15 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

### Exercice 24

Soient  $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

- Donner une interprétation géométrique de  $\text{span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ .
- Est-ce que  $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  est dans le  $\text{span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$  ?

**Sol.:** Il s'agit d'un plan incliné passant par l'origine.



Le vecteur  $\vec{b}$  n'en fait pas partie. Soit on se convainc par le graphe, soit on essaie de trouver les coefficients  $\lambda_1, \lambda_2$  tels que  $\vec{b} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2$ . On obtient une ligne du type  $(0 \cdots 0 | *)$  et le système est incompatible.

### Exercice 25

Donner une matrice  $A$  de taille  $3 \times 3$  à coefficients non-nuls (tous!) et un vecteur  $\vec{b}$  de  $\mathbb{R}^3$ , tels que  $\vec{b}$  n'appartienne pas à  $\text{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$  où  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$  sont les colonnes de  $A$ .

**Sol.:** Il faut que  $\vec{b}$  ne puisse pas s'écrire comme combinaison linéaire des colonnes de  $A$ . On peut par exemple prendre  $\vec{a}_1 = \vec{a}_2 = \vec{a}_3$ , on aura alors que le  $\text{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$  est une droite de  $\mathbb{R}^3$ . On choisit alors un vecteur  $\vec{b}$  qui n'est pas sur la droite de direction  $\vec{a}_1$ . Par exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

On peut aussi prendre  $\vec{a}_1 = \vec{a}_2$  et  $\vec{a}_3$  différent. Dans ce cas le  $\text{span}$  est un plan. On construit un vecteur  $\vec{b}$  qui n'est pas sur ce plan.

### Exercice 26

Déterminer les valeurs du nombre réel  $a$  pour lesquelles le système d'équations linéaires

$$\begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ y + az = 2 \\ (a^2 - 4)z = a - 2 \end{cases}$$

possède des solutions. Déterminer ces solutions.

**Sol.:** La matrice augmentée du système est

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & a & 2 \\ 0 & 0 & (a^2 - 4) & a - 2 \end{array} \right)$$

1. Si  $a = 2$ , alors la dernière ligne est  $(0 \ 0 \ 0 \ | \ 0)$  et il y'a une infinité de solutions. En effet

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

et les solutions sont données par  $s = (0, 2 - 2z, z)$ , avec  $z \in \mathbb{R}$ .

2. Si  $a = -2$  alors la dernière ligne est  $(0 \ 0 \ 0 \ | \ -4)$  et il n'y a pas de solutions.  
 3. Si  $a \neq \pm 2$  alors la dernière ligne devient  $(0 \ 0 \ a+2 \ | \ 1)$  et la forme échelonnée de la matrice est

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & a & 2 \\ 0 & 0 & a+2 & 1 \end{array}\right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{a-2}{a+2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{a+4}{a+2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{a+2} \end{array}\right)$$

Il y'a une unique solution donnée par

$$\begin{cases} x = \frac{a-2}{a+2} \\ y = \frac{a+4}{a+2} \\ z = \frac{1}{a+2} \end{cases}$$